Suites

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 28 décembre 2020

(https://cours-particuliers-bordeaux.fr) (https://mathweb.fr)

Principe de récurrence

Une propriété $\mathcal{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ si et seulement si :
- $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (initialisation)
- pour un entier $k \geqslant n_0$ fixé, si on suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie alors $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi (hérédité).

Exemple de rédaction. On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad 1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Démontrons-la par récurrence :

- **Initialisation** : pour $n=0$, la propriété donne :
$$1=(0+1)^2$$
ce qui est vrai.
- **Hérédité** : supposons que pour un entier naturel k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. On a alors :
$$1+3+5+7+9+11+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2.$$
Ainsi, en ajoutant $(2k+3)$ à chaque membre, on obtient :
$$\begin{aligned}1+3+5+7+9+11+\cdots+(2k+1)+(2k+3) &= (k+1)^2+(2k+3)\\ &= k^2+2k+1+(2k+3)\\ &= k^2+4k+4\\ &= (k+2)^2.\end{aligned}$$
Cette dernière égalité est exactement $\mathcal{P}_{k+1}$ donc l'hérédité est vérifiée.

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie et, pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.
D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Limites d'une suite

Convergence et divergence

On dit qu'une suite (u_n) **converge** si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est un nombre fini.

On dit qu'une suite (u_n) **diverge** si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, la suite n'est considérée ni comme convergente, ni comme divergente au lycée.

Limites de référence

$$\boxed{k\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} n^k=+\infty} \qquad \boxed{k\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}=0} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0}$$

Théorème de comparaison

— Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\begin{cases} v_n \geqslant u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

— Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\begin{cases} v_n \leqslant u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes)

Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\begin{cases} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (ℓ étant un nombre <u>fini</u>).

Limite de q^n

— Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
— Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
— Si $q < -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas.

Suite majorée, suite minorée, suite bornée

— Une suite (u_n) est *majorée* par M si tous ses termes sont inférieurs à M : $u_n \leqslant M$ pour tout entier n.
— Une suite (u_n) est *minorée* par m si tous ses termes sont supérieurs à m : $u_n \geqslant m$ pour tout entier n.
— Une suite (u_n) est *bornée* par m et M si tous ses termes sont compris entre m et M : $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout entier n.

Théorème de convergence des suites monotones

— Toute suite strictement décroissante et minorée converge.
— Toute suite strictement croissante et majorée converge.

Opérations sur les limites

— On peut ajouter deux limites sauf si l'une est « $+\infty$ » et l'autre « $-\infty$ ».
— On peut multiplier deux limites sauf si l'une est « 0 » et l'autre « ∞ » (peu importe le signe).
— On peut diviser deux limites sauf si elles sont toutes les deux infinies ou si elles sont toutes les deux nulles.

Ces cas impossibles sont appelés « formes indéterminées » :

$$\boxed{\text{« } +\infty - \infty \text{ »}} \quad \boxed{\text{« } 0 \times \infty \text{ »}} \quad \boxed{\text{« } \dfrac{\infty}{\infty} \text{ »}} \quad \boxed{\text{« } \dfrac{0}{0} \text{ »}}$$